Solution de l’exercice 6 :

Soient les statistiques d’ordre d’un -échantillon issu d’une loi continue de fonction de répartition . On pose

1. est la ième statistique d’ordre d’un échantillon de loi uniforme sur .
2. a) suit la loi de densité

b) On sait que la densité conjointe de est donnée par

où

On obtient après substitution

* 1. Montrons que sont des variables aléatoires indépendantes. Pour cela il faut montrer que

On a

D’après le théorème de changement de variables

Par suite

On remarque :

avec

Conclusion

Les variables et sont indépendantes.

* 1. Montrons que est uniformément distribuée :

La fonction de répartition de est donnée par

En dérivant , on obtient la densité de

Donc est uniformément distribuée sur ]0,1[.